PROBLEMAS RESUELTOS DE GEOMETRÍA SIMPLE EN ESTÁTICA, UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL: NIVEL AVANZADO.

Problema 6

Calcular el campo magnético producido por un cilindro de radio R y longitud infinita que contiene en su interior una densidad de corriente $\overline{J} = J_0 \overline{1z}$ A/m² (constante), recubierto por una concha cilíndrica de radio R y longitud infinita con densidad superficial de corriente $\overline{K} = K_0 \overline{1\varphi}$ A/m (constante).

Solución.

ESTUDIO DE COORDENADAS Y DE COMPONENTES NULAS

Dado que el sistema de corrientes tiene simetría cilíndrica, el campo magnético depende sólo de la coordenada radial. Además, por Ley de Gauss para el campo magnético, cuando el campo magnético sólo depende de ρ, entonces $H_\rho = 0$.

En este problema las corrientes no tienen una dirección única, por lo que no puede aplicarse la regla de la mano derecha a menos que se resuelva el problema por superposición, es decir, calculando el efecto de cada corriente de manera independiente. Así, el campo producido por la densidad de corriente $\overline{J} = J_0 \overline{1z}$ no tiene componente axial $(H_z = 0)$, mientras que el campo producido por la densidad de corriente superficial $\overline{K} = K_0 \overline{1\varphi}$ no tiene componente angular $(H_\varphi = 0)$.

CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO POR LA DENSIDAD DE CORRIENTE VOLUMÉTRICA.

El campo producido por $\overline{J} = J_0 \overline{1z}$ tiene la forma $\overline{H} = H_\varphi(\rho)\overline{1\varphi}$. Se aplica la Ley de Ampère, eligiendo como contornos de integración líneas coordenadas $\varphi\big|_{(\rho=\rho_0, z=z_0)}$.

La Ley de Ampère establece:

$$\oint_{L=\partial S} \overline{H} \cdot \overline{dl} = I_S$$

Al evaluar el lado izquierdo de la Ley de Ampère (la circulación del campo) se obtiene:

$$\oint_{L=\delta S} \overline{H} \cdot \overline{dl} = \int_0^{2\pi} H_\varphi(\rho)\,\rho\, d\varphi \Bigg|_{\rho=\rho_0, z=z_0} = 2\pi\, \rho_0\, H_\varphi(\rho_0)$$

Por otra parte, el lado derecho es la corriente enlazada por el contorno, es decir, la corriente que fluye en dirección z:

$$I_S = I_z = \int_{S \cap V_J} \overline{J} \cdot \overline{da_z} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_0} J_0\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \pi\, J_0\, \rho_0{}^2, \text{si } \rho_0 \le R \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{R} J_0\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \pi\, J_0\, R^2, \text{si } \rho_0 \ge R \end{cases}$$

Igualando ambos lados de la ecuación, despejando la componente angular del campo, y haciendo $\rho_0 = \rho$ se tiene:

$$H_\varphi(\rho) = \begin{cases} J_0 \dfrac{\rho}{2}, \text{si } \rho \le R \\ J_0 \dfrac{R^2}{2\rho}, \text{si } \rho \ge R \end{cases}$$

CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO POR LA DENSIDAD DE CORRIENTE VOLUMÉTRICA.

El campo producido por $\overline{K} = K_0 \overline{1\varphi}$ tiene la forma $\overline{H} = H_z(\rho)\overline{1z}$. Se aplica la Ley de Ampère sobre contornos rectangulares compuestos por dos segmentos de líneas coordenadas *z* y dos segmentos de líneas coordenadas radiales, tal como se muestra en la figura 1.

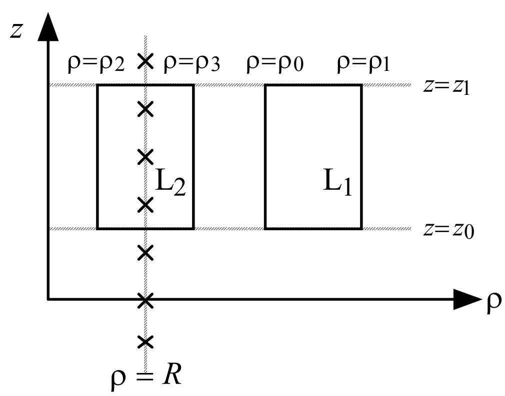

Fig. 1: Contornos para el cálculo de la componente axial del campo magnético en el ejemplo 2. Las cruces muestran las líneas de flujo del vector densidad superficial de corriente.

Para el contorno L_1 recorrido en sentido horario, se tiene:

$$\oint_{L_1} \overline{H} \cdot \overline{dl} = [H_z(\rho_0) - H_z(\rho_1)](z_1 - z_0) = I_S = 0$$

De aquí se tiene que $H_z(\rho_0) = H_z(\rho_1)\ \forall\left(\rho_0 > R\right) \wedge \left(\rho_1 > R\right)$, por lo que $H_z = H_0$ (constante) para ρ >*R*. Como el campo para $\rho \to \infty$ debe anularse, puesto que la distribución de corrientes es de radio finito, entonces $H_z = 0$ para ρ >*R*.

Para el contorno L_2 recorrido en sentido horario, se tiene:

$$\oint_{L_2} \overline{H} \cdot \overline{dl} = [H_z(\rho_2) - H_z(\rho_3)](z_1 - z_0) = I_S$$

$$I_S = \int_{L_n = S \cap S_K} \overline{K} \cdot \overline{1n}\, dl_n = \int_{z_0}^{z_1} \overline{K} \cdot \overline{1\varphi}\, dz = K_0(z_1 - z_0)$$

de donde $H_z(\rho_2) - H_z(\rho_3) = K_0\ \forall\left(\rho_2 < R\right) \wedge \left(\rho_3 > R\right)$. Como $H_z = 0$ para $\rho > R$, se tiene finalmente $H_z(\rho) = K_0$ para $\rho < R$.

CÁLCULO DEL CAMPO TOTAL

El campo total se calcula sumando los campos parciales producidos por cada corriente. Este resulta ser:

$$\overline{H}(\rho) = \overline{1\varphi}\, H_\varphi(\rho) + \overline{1z}\, H_z(\rho) = \begin{cases} \overline{1\varphi}\, J_0 \dfrac{\rho}{2} + \overline{1z}\, K_0, \text{si } \rho < R, 0 \le \varphi < 2\pi, |z| < \infty \\ \overline{1\varphi}\, J_0 \dfrac{R^2}{2\rho}, \text{si } \rho > R, 0 \le \varphi < 2\pi, |z| < \infty \end{cases}$$